Μάθημα 6ο 21/03/2019

Είδαμε: Τοπολογία του $\mathbb{C}$ = Τοπολογία του $\mathbb{R}^2$

Ανάλογα: Ακολουθίες στο $\mathbb{C}$ = Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^2$

Σύγκλιση ακολ. στο $\mathbb{C}$ = σύγκλιση ακολ. στο $\mathbb{R}^2$

(λίγο) Πιο αναλυτικά ακολ. στο $\mathbb{C}$ = απεικόνιση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{C}$.

Ορισμός Μια ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει στο $z_0 \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Συμβολικά

$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ ή $z_n \to z_0$ ή $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$

Αν μια ακολ. συγκλίνει το όριο είναι μοναδικό.

Παρατήρηση

(α) $z_n \to z_0 \Leftrightarrow z_n - z_0 \to 0 \Leftrightarrow \underbrace{|z_n - z_0|}_{\in \mathbb{R}_0} \to 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0 \wedge \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$

$(\Leftrightarrow ((\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_0)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_0)^2)^{1/2} \to 0$

$\Leftrightarrow \|(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0 - \operatorname{Im} z_n)\| \to 0)$

(β) $z_n \to z_0 \overset{!!!}{\Rightarrow} |z_n| \to |z_0|$.

Αντιπαράδειγμα ότι το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει

Αντίστοιχα, όπως και στο $\mathbb{R}^2$ ορίζεται η υπακολουθία, φραγμένη ακολουθία ($\exists c > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ώστε $|z_n| \leq c$)'

$\boxed{\text{ακολουθία Cauchy} \Leftrightarrow \text{συγκλίνουσα ακολ.}}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$z_n \to z$, $w_n \to w$ $\Rightarrow$ (α) $z_n + w_n \to z + w$, (β) $z_n w_n \to z w$

(γ) $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$ $(w \neq 0)$.

Απόδειξη

(α) $z_n + w_n \to z + w$ είναι όπως στον $\mathbb{R}^2$

Για τα άλλα δύο (β, γ) είναι όπως στο $\mathbb{R}$ (!)

[Έστω $z_n \to z$ και $w_n \to w$, $\varepsilon > 0$. Τότε ως συγκλίνουσα η (z_n) είναι φραγμένη $\Rightarrow \exists\ c > |w|$ με $|z_n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Επίσης $\exists\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $\forall\ n \geq n_1$, $n \geq n_2$

$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot C}$ $\quad |w_n - w| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot C}$

$\Rightarrow \forall\ n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$: $|z_n w_n - z w| \leq \underbrace{|z_n|}_{\leq C} \underbrace{|w_n - w|}_{\leq \varepsilon / 2 C} < \varepsilon$

Ειδικότερα :

$$a^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad a \in (-1, 1).$$

$$\sqrt[n]{a} \to 1, \quad a > 0$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

(Αντι) Παράδειγμα

$(i^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ έχει τις τιμές :

$$i^n = \left(e^{i \frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{i n \frac{\pi}{2}}$$

$$= \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 1, & n = 4k. \\ i, & n = 4k + 1. \\ -1, & n = 4k + 2. \\ -i, & n = 4k + 3. \end{cases} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Όμως : $|i^n| = |i|^n = 1^n = 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

Παράδειγμα (Στην πράξη υπολογίζουμε όρια ακολ. όπως στον $\mathbb{R}^2$ αν πάρουμε την αλγ. μορφή τους. π.χ. στον $\mathbb{R}^2$

$$\sqrt[n]{n} + i \sqrt[n]{2} \to 1 + i \quad \left(\Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{2}\right) \to (1,1)\right)$$

Παρατήρηση

Όπως και στον $\mathbb{R}^m$ και γενικά σε μετρικούς χώρους (και ειδικότερα σε χώρους με νόρμα πεπερασμένης διάστασης) οι ακολ. μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την εξέταση τοπολογικών ιδιοτήτων υποσυνόλων του $\mathbb{C}$.

Π.χ.

$D \subset \mathbb{C}$: κλειστό

$\Leftrightarrow \forall (z_n) \subset D$.

με $z_n \to z_0 \in \mathbb{C}$: $z_0 \in D$.

• Μέχρι τώρα: σύγκλιση ακολ. στο $\mathbb{C}$ σε (προς) σημείο του $\mathbb{C}$ (όπως στον $\mathbb{R}^2$)

Ανάλογα με το $\mathbb{R}$, υπάρχει και στο $\mathbb{C}$ η έννοια της σύγκλ. στο άπειρο

Επεκτείνουμε το $\mathbb{C}$ στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

με ένα επιπλέον («κατ' εξοχήν») σημείο (επιπλ., βασικό, δεν είναι σημείο)

το οποίο δεν ανήκει στο $\mathbb{C}$ $\boxed{\infty \notin \mathbb{C}}$ το οποίο ονομάζεται άπειρο.

Ορισμός

Λέμε, μια ακολ. $(z_n) \subset \mathbb{C}$, συγκλίνει (τείνει) στο άπειρο,

συμβολικά $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ (ή $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$) αν $\forall r > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$

έτσι ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ με $\boxed{n \geq n_0}$ να ισχύει $\underbrace{|z_n|}_{\in [0,+\infty) \subset \mathbb{R}} > r$ ($\Leftrightarrow |z_n| \to +\infty$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για το αν $z_n \to \infty$, τα $\arg z_n$ δεν παίζουν κανένα ρόλο !

$\Rightarrow$ (Προσοχή !) μπορεί κάποια ακολ. πραγμ. αριθμών να

συγκλίνει στο $\infty \in \tilde{\mathbb{C}}$, αλλά να μην συγκλίνει στο $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Π.Χ.

$((-1)^n) \subset \mathbb{R}$ δεν συγκλίνει ~~ούτε~~ ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$

αλλά η $(-1)^n \to \infty$ στο $\tilde{\mathbb{C}}$ $\Leftrightarrow n \to \infty$ στο $\tilde{\mathbb{R}}$

Στην πράξη $z_n \to \infty \Leftrightarrow \forall \frac{1}{\varepsilon} > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \underbrace{|z_n| > \frac{1}{\varepsilon}}_{\Leftrightarrow\ \frac{1}{|z_n|} < \varepsilon}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \frac{1}{|z_n|} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{|z_n|} \to 0$.

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{z_n} \to 0}$ (από τον ορισμό, προκύπτει ότι $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ του $z_n \to \infty$, $|z_n| > 0$.)

Παρατήρηση:

Στο $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ορίζονται «συμβολικά» οι πράξεις

$\infty \pm z = z \pm \infty = \infty$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

$w\,\infty = \infty\, w = \infty$, $\forall w \in \mathbb{C}^*$

(αλλά δεν ορίζονται (ούτε συμβολικά) $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{z}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{z} = 0$, $\frac{\infty}{0} = \infty$.

Παραδείγματα

(α) $\underbrace{\frac{1}{m}}_{\to 0} + i\underbrace{\sqrt{m}}_{\to +\infty} \to \infty$??? $\iff \left|\frac{1}{m} + i\sqrt{m}\right| \to \infty$

$\iff \frac{|1 + i m^{3/2}|}{m} \to \infty$.

$\iff \frac{\sqrt{1+m^3}}{m} \to \infty$.

$\iff \frac{m}{\sqrt{1+m^3}} \to \infty$.

(β) Από τους παραπάνω συμβολικούς ορισμούς έχουμε:

Άσκηση

(i) $z_m \to \infty$, $\tilde{z}_m \to z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow z_m \pm \tilde{z}_m \to \infty$, $\tilde{z}_m + z_m \to \infty$.

(ii) $w_m \to \infty$, $\tilde{w}_m \to w \in \mathbb{C}^*$ $\Rightarrow$ $\tilde{w}_m z_m \to \infty$, $z_m \cdot w_m \to \infty$

$z_m \to \infty$, $\tilde{z}_m \to z \in \mathbb{C}$ $\quad \frac{\tilde{z}_m}{w_m} \to 0$.

(γ). $|z| > 1 \Rightarrow z^m \to \infty$, αφού $|z^m| = |z|^m \to +\infty \iff$

$\left(\frac{1}{|z|}\right)^m \to 0$.

$\left[\; z^m = e^{m \log z} = \underbrace{e^{m \ln|z|}}_{=|z|^m} \cdot e^{i m \arg z} \;\right]$

Ξανά, $\boxed{\underset{\text{στο } \mathbb{C}}{z_m \to \infty} \iff \underset{\text{στο } \mathbb{R}}{|z_m| \to +\infty}}$

A 32

Δ.ό. $|Re\, z_n| \to \infty$ ή $|Im\, z_n| \to \infty \Rightarrow z_n \to \infty$
$\Leftarrow\!\!\!\!/$.

A 36 Δ.ό. $z_n \to \infty$ και w_n φραγμένη $\Rightarrow z_n + w_n \to \infty$.

Για υπολογιστικές A.24 – A.36 .